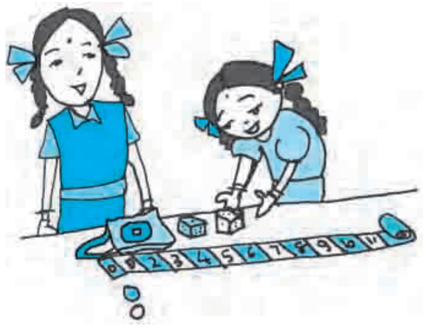
पूर्णाङ्कः

अध्यायः 6

6.1 भूमिका

सुनीतायाः मातुः समीपे 8 कदलीफलानि सन्ति । सुनीतया स्व-मित्रैः सह स्वल्पकालाय प्रवासार्थं गन्तव्यम् अस्ति। सा पाथेयार्थं 10 कदलीफलानि नेतुम् इच्छति। किं तस्याः माता तस्यै 10 कदलीफलानि दातुं शक्नोति ? तस्याः समीपे अपेक्षितकदलीफलानि न सन्ति इत्यतः सा तस्याः प्रतिवेशिन्याः समीपात् 2 कदलीफले ऋणरूपेण स्वीकृत्य पश्चात् प्रत्यावर्तनाय आश्वासनं ददाति। सुनीतायै 10 कदलीफलानि दानानन्तरं तस्याः मातुः पार्श्वे कति कदलीफलानि अवशिष्टानि भवन्ति ? तस्याः पार्श्वे एकमपि कदलीफलं न अवशिष्यते, किन्तु तया स्वप्रतिवेशिन्यै 2 कदलीफले प्रत्यर्पणीये स्तः। यदा सा कतिचन कदलीफलानि प्राप्नोति, भावयन्तु 6 कदलीफलानि, तदा सा 2 कदलीफले प्रत्यर्पयति च तस्याः पार्श्वे केवलं 4 कदलीफलानि अवशिष्टानि भवन्ति।

रोनाल्डः एकां लेखनीं क्रेतुं विपणिं गच्छति । तस्य पार्श्वे केवलं 12 रूप्यकाणि सन्ति, परन्तु एकस्याः लेखन्याः मूल्यं 15 रू. सन्ति। आपणिकः तस्य 3 रूप्यकाणि ऋणरूपेण पुस्तके लिखति। परन्तु सः केन प्रकारेण स्मर्तुं शक्नोति यत् रोनाल्डेन 3 रूप्यकणि देयानि उत तेन स्वीकर्तव्यानि सन्ति इति ? किं सः अमुम् ऋणराशिं केनापि वर्णेन अथवा चिह्नेन व्यक्तीकर्तुं शक्नोति ?

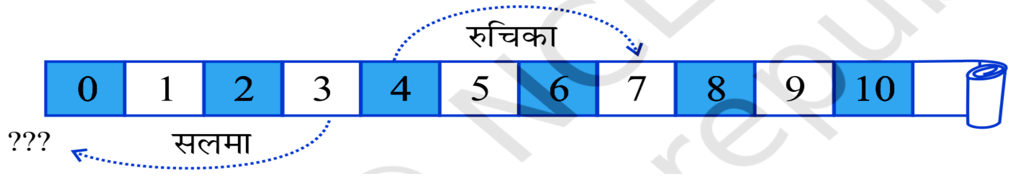


रुचिका अपि च सलमा समाने दूरे 0 तः 25 पर्यन्तम् अङ्काङ्कितया एकया सङ्ख्यापट्टिकया सह क्रीडन्त्यौ स्तः।

प्रारम्भे तु ते द्वे शून्यचिह्नस्य उपरि एकां वर्णरञ्जितां चीटिकां स्थापयतः। एकस्मिन् स्यूते वर्णरञ्जितम् अक्षद्वयं स्थापितम् अपि च तौ क्रमशः निष्कास्यतः । तयोः एकः अक्षः रक्तवर्णीयः अस्ति अन्यः नीलवर्णीयः। यदि अक्षः रक्तवर्णीयः अस्ति तर्हि तस्य क्षेपणेन यः अङ्कः प्राप्तः भवति चीटिका तावत् पर्यन्तम् अग्रे स्थाप्यते । यदि अक्षः नीलवर्णीयः अस्ति तर्हि तस्य क्षेपणेन यः अङ्कः प्राप्तः भवति चीटिका तावत् पर्यन्तं पृष्ठे स्थाप्यते। प्रत्येकं चालनानन्तरम् अक्षौ पुनः स्यूते स्थाप्येते यतो हि द्वयोः कृते अपि अक्षक्षेपणार्थं समानावकाशः लभ्येत। रुचिका-सलमयोः मध्ये या 25 इति चिह्नपर्यन्तं प्रथमं गच्छति सा विजयिनी इति मन्यते। सा क्रीडारम्भं करोति। रुचिका रक्ताक्षं प्राप्नोति अपि च तस्य क्षेपणेन 4 अङ्कस्य प्राप्तिः भवति। अनेन प्रकारेण सा चीटिकां पट्टिकायाः उपरि 4 अङ्काङ्कितस्थाने स्थापयति। सलमा अपि स्यूतात् रक्तवर्णीयम् अक्षं स्वीकरोति अपि च तस्य क्षेपणेन 3 इत्यङ्कं प्राप्नोति। सा चीटिकां पट्टिकायाः उपरि 3 अङ्काङ्कितस्थाने स्थापयति।

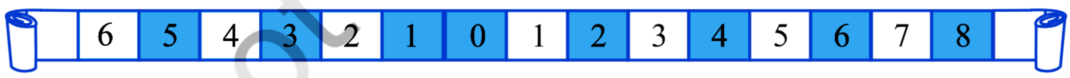
द्वितीयप्रयत्ने रुचिका रक्ताक्षेण 3 इत्यङ्कं प्राप्नोति । सलमा नीलाक्षेण 4 इत्यङ्कं प्राप्नोति । किं भवन्तः चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् द्वितीयप्रयत्नानन्तरं ते स्व-चीटिकां कस्मिन् कस्मिन् स्थाने स्थापयन्ति इति ?

रुचिका अग्रे चलति अपि च 4 + 3, अर्थात् 7 इति स्थाने स्व-चीटिकां स्थापयति।

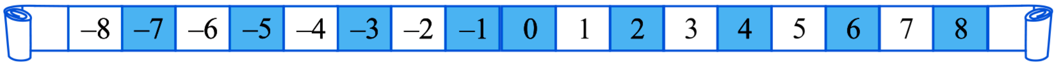


सलमा स्व-चीटिकां शून्ये स्थापयति। रुचिका अस्य उपरि प्रश्नम् उत्थापितवती तथा च सा अवदत् यत् तया शून्यात् पृष्ठे भवितव्यम् इति। सलमा अङ्गीकरोति। परन्तु शून्यात् पृष्ठभागे किमपि नास्ति। ताभ्यां किं करणीयम् ?

तदा सलमा च रुचिका च अन्यस्मिन् पार्श्वे अस्याः पट्टिकायाः वर्धनं कृतवत्यौ। ते अन्यपार्श्वे एकस्याः नीलपट्टिकायाः प्रयोगं कृतवत्यौ।



अधुना सलमा परामर्शं दत्तवती यत् सा शून्यात् एकं स्थानं पृष्ठे अस्ति इत्यतः तत् स्थानं नीलवर्णेन 1 इति अङ्कितं कर्तुं शक्यते । यदि चीटिका नीलवर्णयुक्तस्य 1 इत्यस्य उपरि वर्तते तर्हि तस्य पृष्ठस्थानं नीलयुक्त-द्वे भवति । एवमेव तदपेक्षया पृष्ठस्थानं नीलयुक्त-त्रीणि भवति । एवमेव प्रकारेण ते पृष्ठे चलनस्य निर्णयं स्वीकुरुतः । परन्तु ताभ्यां नीलकर्गदं न प्राप्तम् । तदा रुचिका उक्तवती यत् यदि वयं विपरीतदिशि चलन्तः स्याम तर्हि अस्माभिः अन्यस्मिन् पार्श्वे एकस्य चिह्नस्य प्रयोगः करणीयः इति। अनेन प्रकारेण, पश्यन्तु यत् शून्यात् लघु-सङ्ख्यायाः पक्षे चलनेन अस्माभिः एकस्य चिह्नस्य प्रयोगः अवश्यं कर्तव्यः अस्ति । एतदर्थं सङ्ख्यायाः पुरतः



ऋण (-) चिह्नस्य प्रयोगः क्रियते। अनेन इदं प्रदर्शितं भवति यत् ऋणात्मकचिह्नयुक्ताः सङ्ख्याः शून्यात् लघुतमाः भवन्ति। एताः ऋणात्मकसङ्ख्याः इत्युच्यन्ते।

एतत् कुर्वन्तु

(कः कुत्र अस्ति)

भावयन्तु यत् डेविडः अपि च मोहनः 0 स्थानात् विपरीतदिशि चलनस्य प्रारम्भं कृतवन्तौ। भावयन्तु यत् 0 इत्यस्य दक्षिणभागे चलितपादाः '+' चिह्नेन निरूपिताः भवन्ति अपि च 0 इत्यस्य वामभागे चलितपादाः '-' चिह्नेन निरूपिताः भवन्ति। यदि मोहनः शून्यात् दक्षिणभागे 5 पादान् चलति तर्हि तत् '+5' इति निरूपयितुं शक्यते अपि च डेविडः शून्यात् वामभागे 5 पादान् चलति तर्हि तत् '-5' इति निरूपयितुं शक्यते। अधुना अधोलिखित-स्थानान् + अथवा – चिह्नेन निरूपयन्तु।

(a) शून्यात् वामभागे 8 पादाः

(b) शून्यात् दक्षिणभागे 7 पादाः

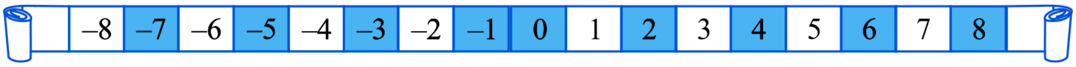
(c) शून्यात् दक्षिणभागे 11 पादाः

(d) शून्यात् वामभागे 6 पादाः

एतत् कुर्वन्तु

(मम पृष्ठभागे कः आगच्छन् वर्तते)

पूर्वतन-उदाहरणेषु वयं दृष्टवन्तः यत् यदि एकया धनात्मकसंख्यया समानं चलनीयम् अस्ति तर्हि वयं दक्षिणभागे चलामः। यदि अनेन प्रकारेण केवलं 1 पादः चलितः भवति तर्हि अस्माभिः तस्याः सङ्ख्यायाः



परावर्ति-सङ्ख्या प्राप्ता भवति।

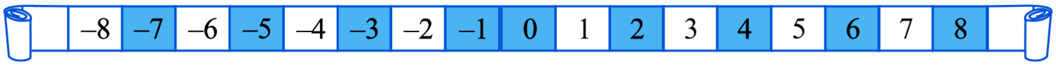
अधोलिखितसङ्ख्यानां परावर्ति-सङ्ख्यां लिखन्तु।

सङ्ख्या	परवर्तिनीसङ्ख्या
10	
8	
-5	
-3	
0	

यदि अस्माभिः ऋणात्मकसंख्यया समानं चलनीयं चेत् तर्हि वामभागे गन्तव्यम्।

यदि वामभागे केवलं 1 पादः चलितः भवति तर्हि अस्माभिः तस्याः सङ्ख्यायाः पूर्ववर्तिसङ्ख्या

प्राप्ता भवति।



अधुना अधोलिखितसङ्ख्यानां पूर्ववर्तिसङ्ख्यां लिखन्तु।

सङ्ख्या	पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या
10	
8	
5	
3	
0	

6.1.1 मया सह एकं चिह्नं स्थापयन्तु

वयं तु दृष्टवन्तः यत् कासाञ्चन सङ्ख्यानां पुरतः ऋणचिह्नं (-) भवति । उदाहरणार्थं यदि वयम् आपणिकाय दीयमानं रोनाल्डस्य देयराशिं दर्शयितुम् इच्छामः तर्हि वयम् अमुम् ‘ – ’ इति लिखामः।

अधः एकस्य आपणिकस्य वित्तविवरण-पञ्जिका (account) दर्शिता अस्ति या केषाञ्चन विशेषवस्तूनां विक्रयणेन प्राप्तलाभस्य उत नष्टस्य विवरणं ददाति।

वस्तूनां नाम	लाभः	नष्टम्	समुचितचिह्नद्वारा निरूपणम्
सर्षपतैलम्	150 रू		....
तण्डुलम्		250 रू	....
कृष्णमरीचिका	225 रू		....
गोधूमः	200 रू		....
कलायतैलम्		330 रू	....

यतो हि लाभः अपि च नष्टम् द्वयमपि विपरीतस्थितिरूपेण अस्ति तर्हि यदि लाभं ‘+’ चिह्नेन निरूपयामः तर्हि नष्टं ’ – ’ चिह्नेन निरूपयामः। उपरि दर्शितायां वित्तविवरण्यां समुचितचिह्नस्य प्रयोगपुरस्सरं रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

एवमेव अन्यस्थितयः, यत्र वयम् एतादृशचिह्नानां प्रयोगं कुर्मः ताः अधोभागे दत्ताः सन्ति।

यथा यथा वयम् अधः चलामः, औन्नत्यं न्यूनं भवति । इत्थं समुद्रस्तलात् अधस्तनम् औन्नत्यं वयं एकया ऋणात्मकसंख्यया व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः अपि च समुद्रस्तलात् उपरितनम् औन्नत्यं एकया धनात्मकसंख्यया व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः।

यदि अर्जितधनराशिं ’+’ चिह्नेन निरूपयामः तर्हि व्ययीकृतं धनराशिं ‘ – ’ चिह्नेन निरूपयितुं शक्नुमः। इत्थं 0° C इत्यस्य उपरितनं तापमानं ’+’ चिह्नेन एवम् अधस्तनं तापमानं ‘ – ’ चिह्नेन निरूपितं कुर्मः।

उदाहरणार्थं, 0° C तः 10° न्यूनः तापमानः -10° C इति लिख्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखतान् समुचितचिह्नेन सह लिखन्तु।

a) समुद्रतलात् 100 मी. अधः

b) 0° C तः 25° C उपरितनः तापमानः

c) 0° C तः 15° C न्यूनः तापमानः

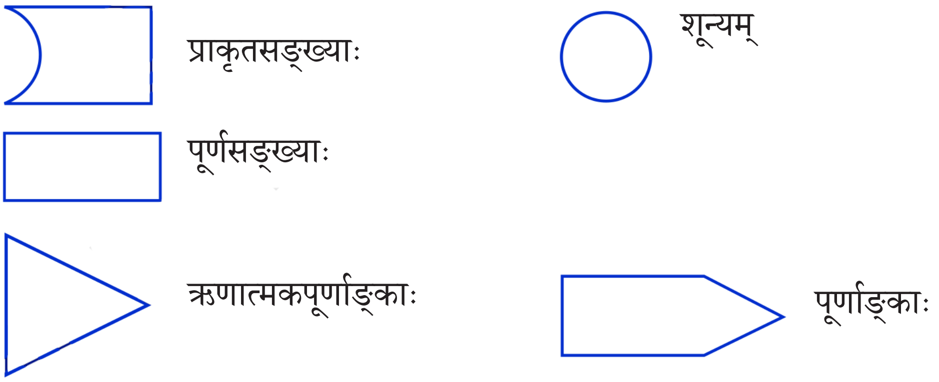
d) 0 तः न्यूनां काः अपि पञ्चसङ्ख्याः

6.2 पूर्णाङ्कः

सर्वस्मात् पूर्वं ज्ञातसङ्ख्याः प्राकृतसङ्ख्याः, अर्थात् 1,2,3,4,... सन्ति। यदि वयं प्राकृतसङ्ख्यानां सङ्ग्रहे शून्यं सम्मिलितं कुर्मः तर्हि अस्माभिः सङ्ख्यानां एकः नूतनसङ्ग्रहः लभ्यते। एताः सङ्ख्याः पूर्णसङ्ख्याः इत्युच्यन्ते। इत्थं 0,1,2,3,4,... पूर्णसङ्ख्याः सन्ति । द्वितीये अध्याये भवन्तः एतासां सङ्ख्यानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः। अधुना अस्माभिः ज्ञातं यत् ऋणात्मकसङ्ख्याः, यथा –1, – 2, – 3, – 4, – 5,... अपि भवन्ति । यदि वयं पूर्णसङ्ख्याभिः सह एताः ऋणात्मकसङ्ख्याः मेलयामः तर्हि अस्माभिः सङ्ख्यानाम् एकः नूतनसङ्ग्रहः प्राप्तः भवति, यः 1,2,3,..., –1, – 2, – 3, – 4,... अस्ति। सङ्ख्यानाम् एषः सङ्ग्रहः पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहः इत्युच्यते।

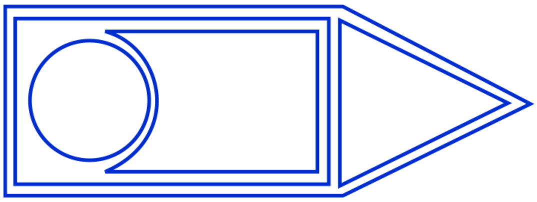
अस्मिन् सङ्ग्रहे 1,2,3,... धनात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते अपि च –1, – 2, – 3,... ऋणात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते।

आयान्तु, अमुम् अधोलिखितया कृतिद्वारा अवगन्तुं प्रयत्नं कुर्मः। भावयन्तु एताः आकृतयः सम्मुखे लिखितसङ्ख्यानाम् अथवा तासां सङ्ग्रहाणां निरूपणं करोति।

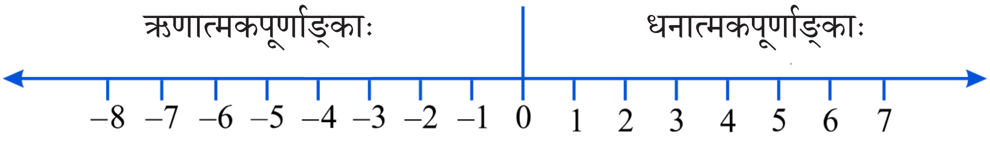


अधुना पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहम् अधोलिखित-आरेखणद्वारा अवगमयितुं शक्यते, यस्मिन् पूर्वोक्ताः सर्वाः सङ्ख्याः तथा तासां सङ्ग्रहाः सम्मिलिताः सन्ति।

पूर्णाङ्कः

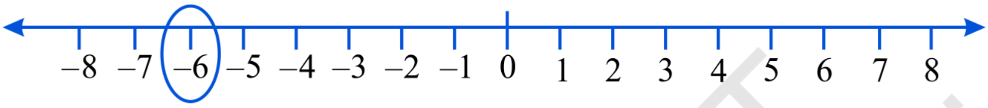


6.2.1 सङ्ख्यारेखायाः उपरि पूर्णाङ्कानां निरूपणम्

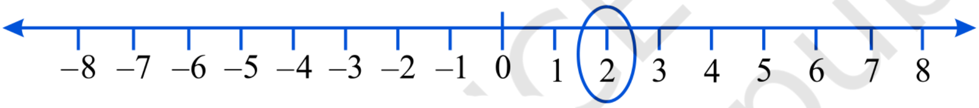


एकां रेखाम् आलिख्य तस्याः उपरि समानदूरे काञ्चनबिन्दून् स्थापयन्तु, यथा उपरितने चित्रे दर्शितम् अस्ति। एतेषु एकं बिन्दुं शून्येन अङ्कितं कुर्वन्तु। शून्यस्य दक्षिणभागे स्थिताः बिन्दवः धनात्मकपूर्णाङ्काः सन्ति अपि च ते +1,+2,+3 अथवा 1,2,3, इत्यादिभिः अङ्किताः सन्ति। वामभागे स्थिताः बिन्दवः ऋणात्मकपूर्णाङ्काः सन्ति अपि च ते –1, – 2, – 3 इत्यादिभिः अङ्किताः सन्ति।

अस्यां रेखायां – 6 इति अङ्कितं कर्तुं वयं शून्यस्य वामभागे 6 बिन्दुपर्यन्तं चलामः। (आकृतिः 6.1)



अस्यां रेखायां +2 इति अङ्कितं कर्तुं वयं शून्यस्य दक्षिणभागे 2 बिन्दुपर्यन्तं चलामः (आकृतिः 6.2)



प्रयत्नं कुर्वन्तु

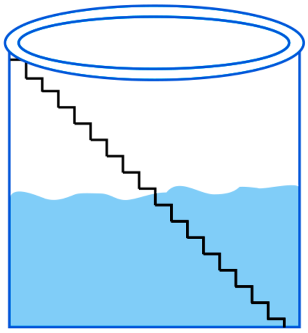
सङ्ख्यारेखायाः उपरि 3, 7, - 4, - 8, -1 अपि च – 3 इत्येताः सङ्ख्याः अङ्किताः

6.2.2 पूर्णाङ्कानां क्रमबद्धता

एकस्मिन् ग्रामे रमणः अपि च इमरानः वसतः यत्र सोपानयुक्तः कश्चन कूपः अस्ति। अस्मिन् कूपे तलपर्यन्तं आहत्य 25 सोपानानि सन्ति।

एकस्मिन् दिने तौ द्वौ अपि कूपस्य अन्तः गतौ। तत्र तौ प्राप्तवन्तौ यत् जलस्तरपर्यन्तं 8 सोपानानि सन्ति। तौ एतत् द्रष्टुं निर्धारितवन्तौ यत् वर्षापतनानन्तरं कूपः कियत्पर्यन्तं पूरितः भविष्यति इति। तौ अस्मिन् समये यः जलस्तरः अस्ति तस्योपरि शून्यम् अङ्कितं कृतवन्तौ तथा तस्योपरि स्थितेषु सोपानेषु क्रमशः 1,2,3,4,... इति अङ्कितवन्तौ। वर्षायाः

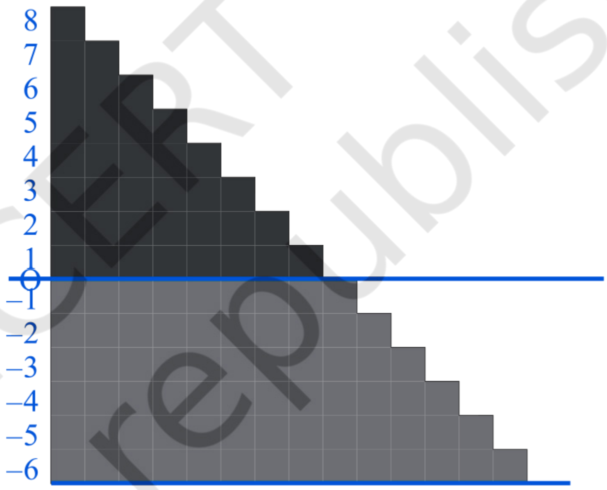
अनन्तरं तौ दृष्टवन्तौ यत् जलस्तरः 6 सोपानपर्यन्तं वर्धितः अस्ति इति। कतिचन मासानन्तरं, तौ दृष्टवन्तौ यत् जलस्तरः शून्यात् 3 सोपानानि अधः गतः अस्ति इति । अधुना तौ जलस्तरस्य अधः पतनं सङ्गतसोपानैः अङ्कितं कृत्वा द्रष्टुं चिन्तितवन्तौ । किं भवन्तः तयोः कृते साहाय्यम् आचरन्ति ?



सहसा रमणः स्मरति यत् सः एकस्य बृहत्-बन्धस्य उपरि शून्यादपि अधस्तनाः लिखिताः सङ्ख्याः दृष्टवान् आसीत्। इमरानः एतत् प्रति ध्यानाकर्षणं करोति यत् शून्यस्य उपरितनानां सङ्ख्यानां तथा च अधस्तनानां सङ्ख्यानां भेदम् अवगन्तुं यः कोऽपि विधिः स्यादेव इति । तदा रमणः स्मरति यत् शून्यात् अधोलिखितानाम् अङ्कानां पुरतः ऋणचिह्नम् आसीत् । अतः सः शून्यात् अधः स्थितयोः द्वयोः सोपानयोः उपरि –1, – 2, – 3 इति अङ्कितवान् ।

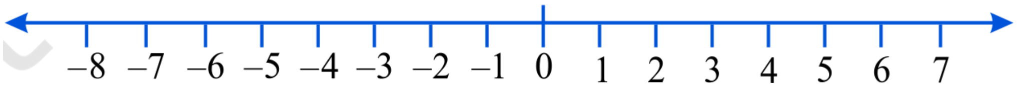
अतः अधुना जलस्तरः – 3 अस्ति (शून्यात् त्रीणि सोपानानि अधः) । एतदनन्तरं, जलस्य उपयोग-कारणात् जलस्तरः इतोऽपि एक-सोपानपर्यन्तम् अधः पतति अपि च – 4 भवति । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् – 4 < – 3 अस्ति इति ।

उपरि उक्तम् उदाहरणं चिन्तयन्तः मञ्जूषाम् > अथवा < चिह्नेन पूरयन्तु ।



0	☐	-1	-100	☐	-101
-50	☐	-70	50	☐	-51
-53	☐	-5	-7	☐	1

आयान्तु, अधुना पुनः तान् पूर्णाङ्कान् पश्यामः ये एकस्याः सङ्ख्यारेखायाः उपरि निरूपिताः सन्ति ।



आकृतिः 6.3

वयं जानीमः यत् $7 > 4$ भवति एवम् उपरि आलिखितया सङ्ख्यारेखया वयं पश्यामः यत् सङ्ख्या 7 संख्यया 4 इत्यनया दक्षिणभागे अस्ति (आकृतिः 6.3)।

इत्थं, $4 > 0$ अपि च सङ्ख्या 4, 0 इति सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे अस्ति। अधुना 0 सङ्ख्या -3 इति सङ्ख्यया इत्यनया दक्षिणभागे अस्ति इत्यतः $0 > -3$ अस्ति। पुनः -3 इति सङ्ख्या -8 इति अनया सङ्ख्यया दक्षिणभागे अस्ति इत्यतः $-3 > -8$ अस्ति।

इत्थं, वयं पश्यामः यत् सङ्ख्यारेखायां यदा वयं दक्षिणभागे चलामः तर्हि सङ्ख्यायाः मानम् अधिकं भवति तथा च वामभागे यदि वयं चलामः तर्हि सङ्ख्यायाः मानं न्यूनं भवति।

अतः, $-3 < -2,\ -2 < -1,\ -1 < 0,\ 0 < 1,\ 1 < 2,\ 2 < 3$ इत्यादयः।

अतः पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहम् ...., – 5, –4, –3,– 2,– 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 … इति अपि लेखितुं शक्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितसङ्ख्यायुग्मान् $>$ अथवा $<$ इत्यस्य प्रयोगं कुर्वन्तः तुलनां कुर्वन्तु।

0	☐	-8	;	-1	☐	-15
5	☐	-5	;	11	☐	15
0	☐	6	;	-20	☐	2

रोहिणी उपर्युक्तप्रश्नैः निम्नलिखितनिष्कर्षान् प्राप्नोति।

a) प्रत्येकं धनात्मकपूर्णाङ्कः प्रत्येकं ऋणात्मक-पूर्णाङ्कात् बृहद्भवति।

b) शून्यं प्रत्येकं धनात्मकपूर्णाङ्कात् लघु भवति।

c) शून्यं प्रत्येकं ऋणात्मकपूर्णाङ्कात् बृहद्भवति।

d) शून्यम् एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः अपि न तथा धनात्मकपूर्णाङ्कः अपि न अस्ति।

e) कापि सङ्ख्या शून्यात् दक्षिणभागे कियद्दूरं भवति तावती बृहती भवति।

f) कापि सङ्ख्या शून्यात् वामभागे कियद्दूरं भवति तावती लघ्वी भवति।

किं भवन्तः ताम् अनुमोदयन्ति ? उदाहरणं ददतु।

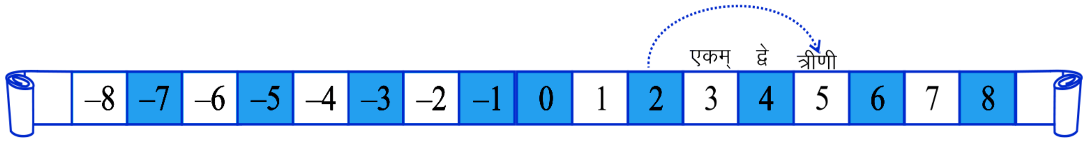
उदाहरणम् 1 : सङ्ख्यारेखां दृष्ट्वा अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।
–8 अपि च –2 एतयोः मध्ये काः काः पूर्णाङ्कसङ्ख्याः सन्ति ? एतासु का सङ्ख्या बृहत्तमा अस्ति ? तथा का सङ्ख्या लघुतमा अस्ति ?

समाधानम् : –8 अपि च –2 एतयोः मध्ये स्थितसङ्ख्याः –7, – 6, – 5, – 4 अपि च –3 सन्ति। एतासु –3 बृहत्तमा सङ्ख्या अस्ति अपि च –7 लघुतमा सङ्ख्या आस्ति।

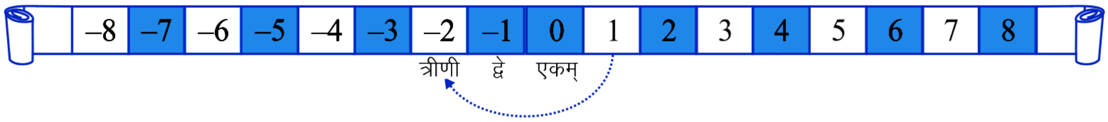
यदि अहं शून्यस्य उपरि न स्याम् तर्हि मम चलनेन किं भवति ?

आयान्तु, सलमया अपि च रुचिकया पूर्वं क्रीडित-क्रीडायाः विषये विचारं कुर्मः। भावयन्तु यत् रुचिकायाः चीटिका 2 सङ्ख्यायां अस्ति। अग्रिम-पर्याये तया रक्ताक्षः प्राप्यते अपि च तस्य क्षेपणेन सङ्ख्या 3 प्राप्ता

भवति। अस्यार्थः एवम् अस्ति यत् सा 2 सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे 3 स्थानं चलिष्यति। एवमेव सा 5 सङ्ख्यायां।



अपरस्मिन् पक्षे यदि सलमा 1 सङ्ख्यायाः उपरि आसीत् अपि च स्यूतात् नीलाक्षं निष्कासयति, यस्य क्षेपणेन सा 3 सङ्ख्यां प्राप्नोति। अस्यार्थः एवम् अस्ति यत् सा 1 सङ्ख्यायाः वामभागे 3 स्थानं चलति। इत्थं सा – 2 प्राप्नोति।



सङ्ख्यारेखां दृष्ट्वा अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

उदाहरणम् 2 : (a) -3 इत्यस्मिन् एकः पिञ्जः स्थापितः अस्ति। – 9 पर्यन्तं गन्तुम् अस्माभिः कस्यां दिशायां कति चरणानि गन्तव्यानि भवन्ति ?

(b) यदि वयं -6 इति सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे इतोऽपि 4 चरणानि चलामः तर्हि कां सङ्ख्यां प्राप्नुमः ?

समाधानम् : (a) अस्माभिः – 3 इति सङ्ख्यायाः वामभागे इतोऽपि 6 चरणानि गन्तव्यानि भवन्ति।

(b) यदि वयं -6 इति सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे इतोऽपि 4 पदानि चलामः तर्हि वयं – 2 सङ्ख्यां प्राप्नुमः।

अभ्यासः 6.1

1. अधोलिखितानां विपरीतं लिखन्तु।

(a) भारे वृद्धिः (b) 30 कि.मी उत्तरदिशा

(c) 326 क्रि.पूर्वम् (d) 700 रू इत्यस्य नष्टम् (e) समुद्रतलात् 100 मी. उपरि

2. अधोलिखितेषु प्रयुक्तसङ्ख्याः समुचितं चिह्नं संस्थाप्य पूर्णाङ्कानां रूपेण लिखन्तु।

a) एकं वायुयानं भूमेः 2000 मीटर् औन्नत्ये उड्डयति।

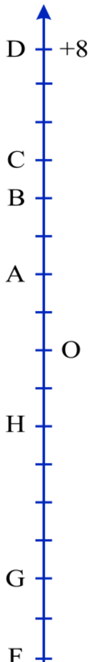
b) एकं जलयानं समुद्रस्तरात् 800 मी. अन्तः चलति।

c) वित्तकोशे 200 रू. नियोजनम्।

d) वित्तकोशात् 700 रू. निष्कासनम्।

3. अधोलिखितसङ्ख्याः सङ्ख्यारेखायां निरूपिताः कुर्वन्तु।

(a) + 5 (b) – 10 (c) + 8 (d) – 1



4. संलग्नाकृतौ एका ऊर्ध्वाधरा सङ्ख्यारेखा दर्शिता अस्ति या पूर्णाङ्कान् निरूपयति। इमां रेखां पश्यन्तु अपि च अधोलिखितबिन्दूनां स्थानं जानन्तु।

(a) यदि बिन्दुः D पूर्णाङ्कः +8 अस्ति तर्हि – 8 युक्तः बिन्दुः कः अस्ति ?

(b) किं G एकः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ? अथवा धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति ?

(c) बिन्दोः B, E बिन्द्वोः सङ्गतपूर्णाङ्कौ लिखन्तु।

(d) अस्याः सङ्ख्यारेखायाः उपरि अङ्कितबिन्दूनां मध्ये कस्य मानं न्यूनतमं अस्ति ?

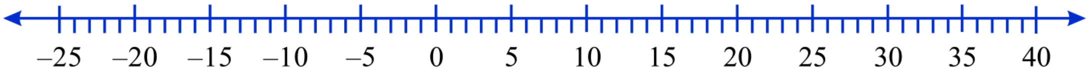
(e) सर्वान् बिन्दून् तेषां मानानाम् अवरोहणक्रमे लिखन्तु।

5. अधः वर्षस्य विशेषदिनेषु भारतस्य पञ्चस्थानेषु स्थिततापमानसूची दत्ता अस्ति।

स्थानम्	**तापमानः**	
सियाचिनम्	0° C तः 10° C अधः	________________
शिमला	0° C तः 2° C अधः	________________
अहमदाबादः	0° C तः 30° C उपरि	________________
देहली	0° C तः 20° C उपरि	________________
श्रीनगरम्	0° C तः 5° C अधः	________________

(a) एतेषां स्थानानां तापमानान् पूर्णाङ्कानां रूपेण रिक्तस्थानेषु लिखन्तु।

(b) अधोलिखितसङ्ख्यारेखा तापमानान् डिग्री-सेल्शियस् (Degree Celsius) इत्यस्मिन् निरूपयति।



सङ्ख्या-रेखायाम् उक्तस्थानानां नाम तेषां तापमानेन सह अङ्कयन्तु।

(c) कतमं स्थानं अधिकं शीतलं भवति।

(d) तेषां स्थानानां नाम लिखन्तु येषां तापमानं 10° C तः उपरि स्यात्।

6. अधोलिखितयुग्मेषु कतमा कतमा सङ्ख्या-रेखायाः उपरि अन्य-सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे अस्ति।

(a) 2, 9 (b) – 3, – 8 (c) 0, – 1

(d) – 11, 10 (e) –6, 6 (f) 1, –100

7. अधः दत्तयुग्मानां पूर्णाङ्कानां मध्ये विद्यमानपूर्णाङ्कान् लिखन्तु। (आरोहणक्रमे)

(a) 0 अपि च – 7 (b) – 4 अपि च 4

(c) – 8 अपि च – 15 (d) – 30 अपि च – 23

8. (a) – 20 तः अधिकतरान् चतुरः ऋणात्मक-पूर्णाङ्कान् लिखन्तु।

(b) – 10 तः न्यूनतरान् चतुरः ऋणात्मक-पूर्णाङ्कान् लिखन्तु।

9. अधोलिखितकथनं सत्यम् अथवा असत्यम् इति लिखन्तु। यदि कथनम् असत्यम् अस्ति, तर्हि सत्यं कुर्वन्तु।

(a) सङ्ख्या-रेखायां – 8, – 10 इत्यस्य दक्षिणभागे अस्ति।

(b) सङ्ख्या-रेखायां – 100, – 50 इत्यस्य दक्षिणभागे अस्ति।

(c) लघुतमः ऋणात्मकः पूर्णाङ्कः – 1 अस्ति।

(d) – 26, – 25 तः बृहदस्ति।

10. एकां सङ्ख्यारेखाम् आलिखन्तु अपि च अधोलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं लिखन्तु।

(a) यदि वयं – 2 इत्यस्य दक्षिणभागे 4 पादान् चलामः तर्हि वयं कस्याः सङ्ख्यायाः समीपं प्राप्स्यामः ?

(b) यदि वयं 1 इत्यस्य अनन्तरं 5 पादान् चलामः तर्हि वयं कस्याः सङ्ख्यायाः समीपं प्राप्स्यामः ?

(c) यदि वयं सङ्ख्यारेखायां – 8 इत्यत्र स्मः तर्हि – 13 प्राप्तुम् अस्माभिः कस्यां दिशि गन्तव्यं भवति ?

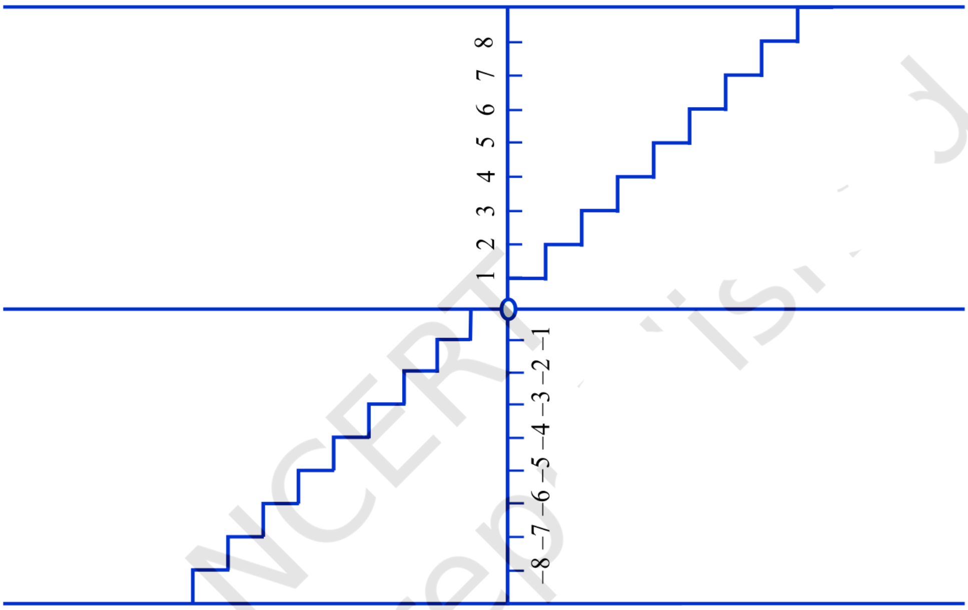
(d) यदि वयं सङ्ख्यारेखायां – 6 इत्यत्र स्मः तर्हि – 1 प्राप्तुम् अस्माभिः कस्यां दिशि गन्तव्यं भवति ?

6.3 पूर्णाङ्कानां योगः

एतत् कुर्वन्तु

(उपरि अपि च अधः गमनम्)

मोहनस्य गृहे छदेः उपरि गन्तुम् अपि च अधः वस्तुभण्डागारं गन्तुं सोपानानि निर्मितानि सन्ति। आयान्तु, छदेः उपरि गन्तुं विद्यमानसोपानानां सङ्ख्याः धनात्मकपूर्णाङ्काः इति तथैव वस्तुसंरक्षणालस्य सोपानानां सङ्ख्याः ऋणात्मकपूर्णाङ्काः इति भावयन्तु तथा भूमिस्तरे निरूपितसङ्ख्यां 0 इति भावयन्तु।



अधोलिखितप्राश्नानाम् उत्तरं ददतु अपि च स्व-उत्तरान् पूर्णाङ्कानां रूपेण लिखन्तु।

(a) भूमितलात् 6 सोपानानि उपरि चलन्तु।

(b) भूमितलात् 4 सोपानानि अधः चलन्तु।

(c) भूमितलात् 5 सोपानानि उपरि चलन्तु अपि च पुनः ततः 3 सोपानानि उपरि चलन्तु।
(d) भूमितलात् 6 सोपानानि अधः चलन्तु अपि च पुनः ततः 2 सोपाने अधः चलन्तु।
(e) भूमितलात् 5 सोपानानि अधः चलन्तु अपि च ततः 12 सोपानानि उपरि चलन्तु।
(f) भूमितलात् 8 सोपानानि अधः चलन्तु अपि च पुनः ततः 5 सोपानानि अधः चलन्तु।
(g) भूमितलात् 7 सोपानानि उपरि चलन्तु अपि च पुनः ततः 10 सोपानानि अधः चलन्तु।

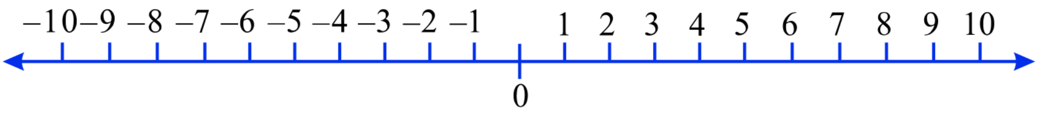
अमीना एतान् अधोलिखितरीत्या लिखितवती।

(a) +6
(b) – 4
(c) (+5) + (+ 3) = + 8
(d) (- 6) + (- 2) = - 4
(e) (-5) + (+ 12) = + 7
(f) (- 8) + (+ 5) = - 3
(g) (+ 7) + (- 10) = 17

सा काञ्चन दोषान् कृतवती। किं भवन्तः तस्याः उत्तरस्य परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति अपि च दोषान् समीकर्तुं प्रभवन्ति ?

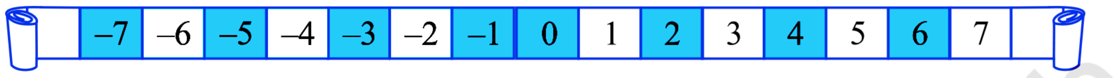
प्रयत्नं कुर्वन्तु

भूमेः उपरि तिर्यक्सङ्ख्यारेखायाः रूपेण एकाम् आकृतिं रचयन्तु यथा अधः दर्शिता अस्ति। उपरि उक्तोदाहरणे दत्तप्रश्नैः सदृशान् कानिचन प्रश्नान् निर्मान्तु अपि च पुनः तान् समाधातुं स्व मित्राणिकथयन्तु।



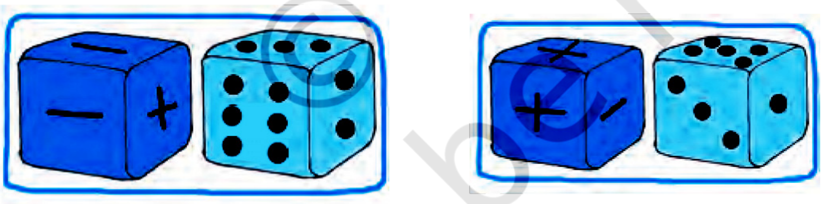
एका क्रीडा

एकां सङ्ख्यापट्टिकां स्वीकुर्वन्तु यस्याः उपरि + 25 तः – 25 पर्यन्तं पूर्णाङ्काः लिखिताः स्युः।



द्वौ अक्षौ स्वीकुर्वन्तु ययोः मध्ये एकस्य उपरि 1 तः 6 पर्यन्तं सङ्ख्याः अङ्किताः स्युः एकस्य उपरि त्रीणि "+" चिह्नानि अपि च त्रीणि "-" चिह्नानि अङ्कितानि भवेयुः।

क्रीडकाः भिन्न-भिन्नवर्णात्मकान् पिञ्जान् सङ्ख्यापट्टिकायाः उपरि 0 स्थानस्य उपरि स्थापयन्ति। द्वयोः अपि अक्षयोः क्षेपणानन्तरं क्रीडकः पश्यति यत् सः तयोः अक्षयोः किं प्राप्तवान् इति। यदि प्रथमाक्षात् 3 अपि च द्वितीयाक्षात् - आगच्छति तर्हि तेन – 3 प्राप्तम् अस्ति। यदि प्रथमाक्षात् 5 अपि च द्वितीयाक्षात् + आगच्छति तर्हि तेन + 5 प्राप्तम् अस्ति।

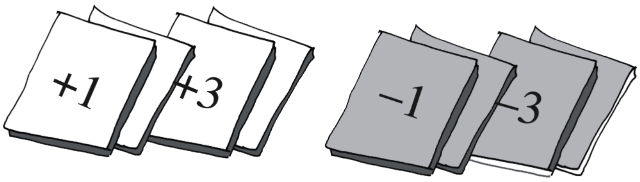


यदि क्रीडकेन + चिह्नं प्राप्यते तर्हि सः अग्रिमायां दिशि (+ 25 प्रति) चलति यदि केनापि क्रीडकेन – चिह्नं प्राप्यते तर्हि सः पृष्ठतः चलति (- 25 प्रति)।

प्रत्येकं क्रीडकः अक्षद्वयमपि सहैव क्षिपति। यः क्रीडकः यस्य पिञ्जः – 25 सङ्ख्यां प्राप्नोति सः क्रीडातः बहिर्भवति अपि च यस्य पिञ्जः + 25 सङ्ख्यां स्पृशति सः विजयी भवति।

भवन्तः इमामेव क्रीडां एतादृशानि 12 स्फोरकपत्राणि येषामुपरि + 1, +2, + 3, + 4, + 5, + 6 तथा – 1, – 2, – 3, – 4, – 5, – 6 इति सङ्ख्याः अङ्किताः स्युः, तानि स्वीकृत्य अपि क्रीडितुं शक्नुवन्ति। स्फोरकपत्रस्वीकारस्य प्रत्येकं प्रयत्नस्यानन्तरं एतानि मिश्रीकुर्वन्तु।

कमला, रेश्मा अपि च मीनूः इमां क्रीडां क्रीडन्ति



कमला त्रिषु उत्तमप्रयत्नेषु + 3, + 2,+ 6 प्राप्तवती। सा तस्याः गणनकं + 11 उपरि स्थापितवती। रेश्मा – 5, + 3, + 1 प्राप्तवती। सा – 1 उपरि स्थापितवती। मीनूः + 4, – 3, – 2 प्राप्तवती। सा कुत्र स्थापयेत् ? – 1 उपरि अथवा + 1 उपरि ?

एतत् कुर्वन्तु

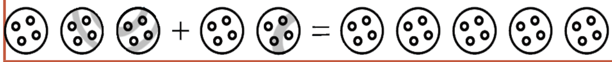
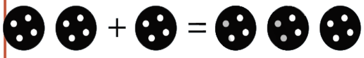
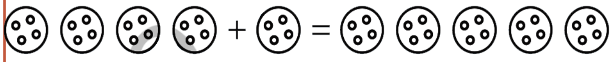
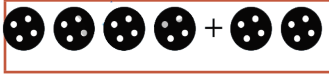
द्वयोः विभिन्नवर्णयोः तद्यथा श्वेतस्य कृष्णवर्णस्य च द्वौ कुड्मलौ स्वीकुर्वन्तु। आयान्तु कञ्चित् श्वेतकुड्मलं (+ 1) इति कृष्णकुड्मलम् (- 1) च इति रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु। एकः श्वेत-कृष्णयुग्मः शून्यं व्यक्तीकरोति अर्थात् [1 + (- 1) = 0]।

अधोलिखितसारिण्यां, पूर्णाङ्काः वर्णीयकुड्मलानां साहाय्येन दर्शिताः सन्ति।

विभिन्नवर्णीय-कुड्मलाः	पूर्णाङ्कः
	= 5
	= -3
	= 0

आयान्तु एतेषां वर्णीयकुड्मलानां साहाय्येन पूर्णाङ्कानां योजनं कुर्मः। अधोलिखितसारिणीं

पश्यन्तु अपि च तान् पूर्णं कुर्वन्तु।

	(+3) + (+2) = +5
	(-2) + (-1) = -3
	....
 = ...	....

यदि भवन्तः धनात्मकपूर्णाङ्कद्वयं प्राप्नुवन्ति तर्हि तयोः योजनं कुर्वन्तु। यथा (+ 3) + (+ 2) = + 5 [3 + 2] अस्ति। यदि भवन्तः ऋणात्मकपूर्णाङ्कद्वयं प्राप्नुवन्ति तर्हि तथापि तय़ोः योजनं कुर्वन्तु किन्तु उत्तरे ऋणचिह्नं (-) स्थापयन्तु। यथा (- 2) + (- 1) = - 3 अस्ति।

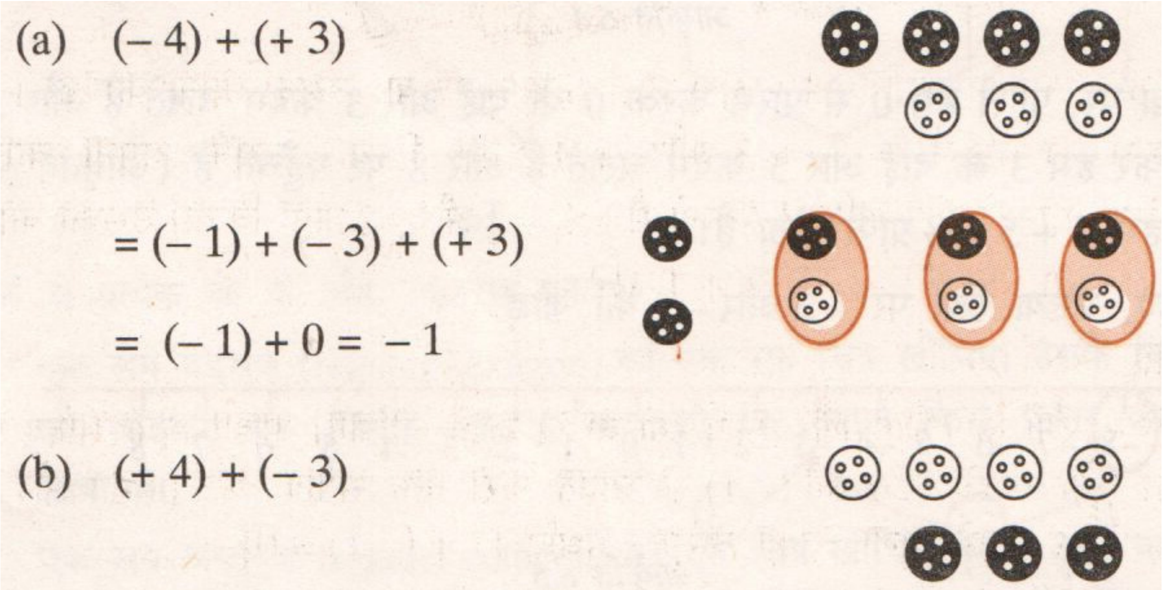
प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां योगं जानन्तु।

(a) (- 11) + (- 12) (b) (+10) + (+ 4)

(c) (- 32) + (- 25) (d) (+ 23) + (+ 40)

अधुना एतेषां पिञ्जानां साहाय्येन धनात्मकम् एकं पूर्णाङ्कं ऋणात्मकेन एकेन पूर्णाङ्केन सह योजयन्तु। पिञ्जान् युग्मेषु अपसारयन्तु। अर्थात् एकं श्वेत-पिञ्जम् अपि च एकं पिञ्जं सहैव अपसारयन्तु [यतः (+1) + (- 1) = 0]। अवशिष्टानां पिञ्जानां निरीक्षणं कुर्वन्तु।



भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 4 – 3 = 1 अस्ति अपि च - 4 + 3 = - 1 अस्ति।

अतः यदि भवद्भिः एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः एकेन ऋणात्मकपूर्णाङ्केन सह योजनीयः अस्ति तर्हि भवद्भिः सङ्ख्यात्मकमानं दृष्ट्वा योजनीयः (सङ्ख्याद्वये अपि बृहत्सङ्ख्याम् अन्वेष्टुं तया सह विद्यमानं चिह्नं त्यजन्तु)। साहाय्यार्थम् इतोऽपि अन्यानि उदाहरणानि अधोलिखितानि सन्ति।

(c) (+ 5) + (- 8) = (+ 5)+ (- 5) + (- 3) = 0 + (- 3) = (- 3)

(d) (+ 6) + (- 4) = (+ 2) + (+ 4) + (- 4) = (+ 2) + 0 = + 2

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां योगफलं जानन्तु ।

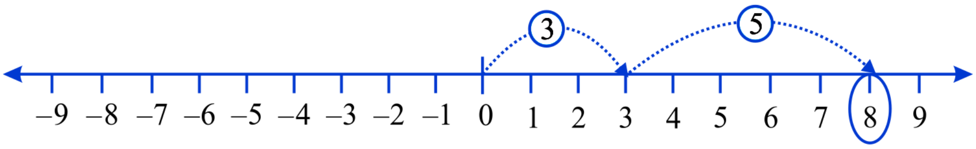
(a) (- 7) + (+ 8) (b) (- 9) + (+ 13)

(c) (+ 7) + (- 10) (d) (+ 12) + (-7)

6.3.1 सङ्खया-रेखायाः उपरि पूर्णाङ्कानां योजनं (योगः)

विभिन्नवर्णात्मकानां पिञ्जानां प्रयोगपुरस्सरं पूर्णाङ्कानां योजनं सर्वदा सरलं न भवति । किम् अस्माभिः योजनं कर्तुं सङ्ख्या-रेखायाः प्रयोगः करणीयः अस्ति ?

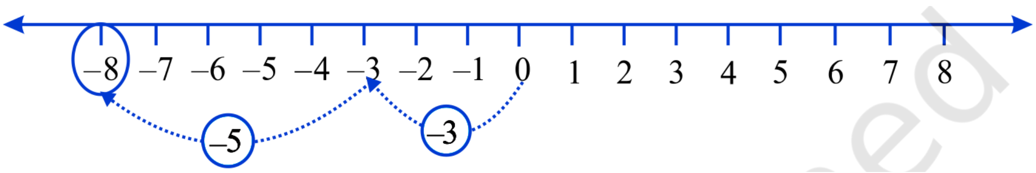
(i) आयान्तु, सङ्ख्यारेखायाः उपरि 3 अपि च 5 योजयन्तु ।



आकृतिः 6.4

सङ्ख्यारेखायां पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 3 पादान् स्थापयामः अपि च 3 इति प्राप्नुमः । पुनः वयं 3 इत्यस्य दक्षिणभागे 5 पादान् चलामः अपि च 8 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.4)। इत्थम् अस्माभिः 3 + 5 = 8 प्राप्तः भवति ।

(ii) आयान्तु सङ्ख्यारेखायाः उपरि – 3 अपि च – 5 योजयन्तु ।



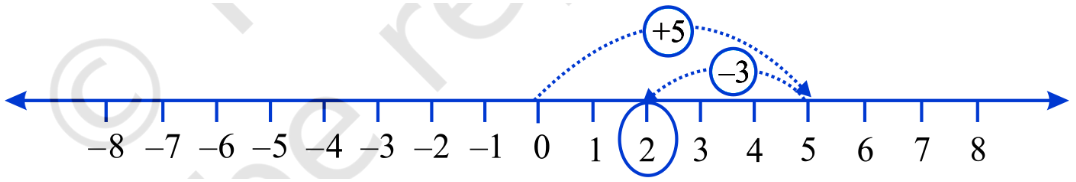
आकृतिः 6.5

सङ्ख्यारेखायां पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य वामभागे 3 पादान् चलामः अपि च – 3 प्राप्नुमः । पुनः वयं – 3 तः वामभागे इतोऽपि 5 पादान् चलित्वा – 8 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.5)।

इत्थम्, अस्माभिः (- 3) + (- 5) = - 8 प्राप्तः भवति ।

वयं पश्यामः यत् यदि वयं किमपि धनात्मकपूर्णाङ्कद्वयं योजयामः चेत् तर्हि योगः एकः धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवति । यदि वयम् ऋणात्मकपूर्णाङ्कद्वयं योजयामः तर्हि योगः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवति ।

(iii) कल्पनां कुर्वन्तु, वयं सङ्ख्यारेखायां (+ 5) अपि च (- 3) एतद्द्वयोः योगं ज्ञातुम् इच्छामः।

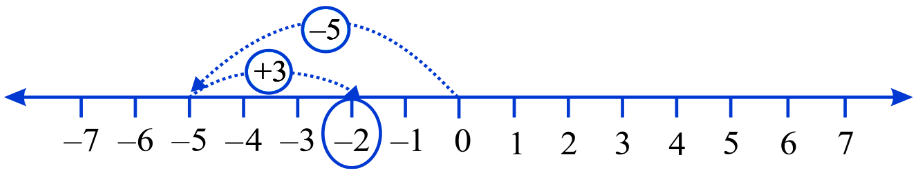


आकृतिः 6.6

पूर्वं वयं सङ्ख्यारेखायां 0 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 5 पादान् चलित्वा 5 प्राप्नुमः। पुनः वयं 5 तः वामभागे 3 पादान् चलित्वा 2 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.6)।

इत्थं (+ 5) + (- 3) = 2 अस्ति।

(iv) इत्थमेव आयान्तु सङ्ख्यारेखायां (- 5) अपि च (+ 3) एतद्द्वयोः योगं कुर्वन्तु।



आकृतिः 6.7

पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य वामभागे 5 पादान् चलामः अपि च – 5 प्राप्नुमः। पुनः वयं - 5 तः दक्षिणभागे 3 पादान् चलित्वा – 2 प्राप्नुमः।

इत्थं (- 5) + (+ 3) = - 2 अस्ति (आकृतिः 6.7)।

यदि केनापि पूर्णाङ्केन सह एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः योजितः भवति तर्हि परिणामपूर्णाङ्कः दत्तपूर्णाङ्कतः बृहत् भवति। यदि केनापि पूर्णाङ्केन ऋणात्मकपूर्णाङ्कः योजितः भवति तर्हि परिणामपूर्णाङ्कः दत्तपूर्णाङ्कतः लघुमान् भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं अधोलिखितानां योगफलं जानन्तु।

   (a) (- 2) + 6 (b) (- 6) + 2

   एवमेव इतोऽपि प्रश्नद्वयं निर्मान्तु तथा च सङ्ख्यारेखायाः साहाय्येन तयोः समाधानं कुर्वन्तु।

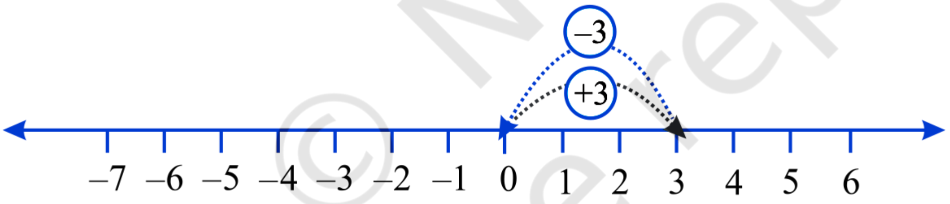
2. सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगेण विना एव अधोलिखितानां प्रश्नानां समाधानं कुर्वन्तु।

   (a) (+ 7) + (- 11) (b) (- 13) + (+ 10)

   (c) (- 7) + (+ 9) (d) (+ 10) + (- 5)

   एवमेव इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् निर्मान्तु तथा तेषां समाधानं कुर्वन्तु।

आयान्तु 3 अपि च – 3 इत्येतयोः योगं कुर्वन्तु। पूर्वं वयं 0 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 3 पादान् चलित्वा 3 प्राप्नुमः। पुनः वयं 3 तः वामभागे 3 पादान् चलित्वा कां सङ्ख्यां प्राप्नुमः ?



आकृतिः 6.8 इत्यत्र वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् वयं 0 सङ्ख्यां प्राप्तवन्तः । अतः 3 + (- 3) = 0 अस्ति । एवमेव यदि वयं 2 अपि च – 2 इत्यनयोः योजनं कुर्मः तर्हि तदा अपि 0 एव प्राप्यते । इत्थं सङ्ख्यायुग्मानां 3 अपि च – 3, 2 अपि च – 2 इत्यादीनां योजनं यदि कुर्मः तर्हि अस्माभिः 0 एव प्राप्तं भवति । एतादृशसङ्ख्याः परस्परं **योज्यप्रतिलोमाः** इत्युच्यन्ते ।

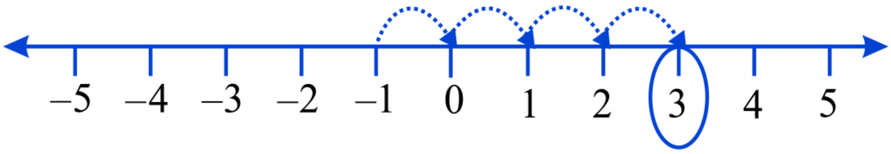
6 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः कः ? – 7 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः कः ?

उदाहरणम् 3 : सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं तान् पूर्णाङ्कान् लिखन्तु ये

(a) – 1 तः 4 अधिकः अस्ति ।

(b) 3 तः 5 न्यूनः अस्ति ।

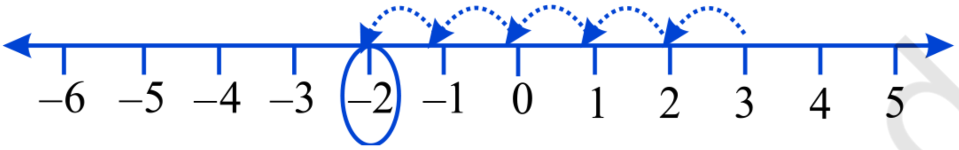
समाधानम् : (a) वयं तं पूर्णाङ्कं ज्ञातुम् इच्छामः यः - 1 तः 4 अधिकः अस्ति । अतः वयं – 1 तः प्रारभ्य दक्षिणभागे 4 पादान् चलामः । एतेन वयं 3 सङ्ख्यां प्राप्नुमः यथा अधः आकृतिः 6.9 इत्यत्र दर्शितमस्ति ।



आकृतिः 6.9

अतः – 1 तः 4 अधिकः पूर्णाङ्कः 3 अस्ति ।

(b) वयं तं पूर्णाङ्कं ज्ञातुम् इच्छामः यः 3 तः 5 न्यूनः अस्ति । अतः वयं 3 तः प्रारभ्य वामभागे 5 पादान् चलित्वा – 2 प्राप्नुमः यथा आकृतिः 6.10 इत्यत्र दर्शितमस्ति ।



आकृतिः 6.10

अतः 3 तः 5 न्यूनः पूर्णाङ्कः -2 इति ।

उदाहरणम् 4 : योगं जानन्तु : (- 9) + (+ 4) + (- 6) + (+ 3)

समाधानम् : वयं सङ्ख्याः इत्थं पुनर्व्यवस्थितं कर्तुं शक्नुमः यथा धनात्मकपूर्णाङ्काः एकस्मिन् समूहे भवेयुः अपि च ऋणात्मकपूर्णाङ्काः एकस्मिन् समूहे भवेयुः । इत्थं

(- 9) + (+ 4) + (- 6) + (+3)

= (- 9) + (- 6) + (+ 4) + (+ 3) = (- 15) + (+ 7)

$= -8 + (-7) + (+7) = -8 + 0 = -8$

उदाहरणम् 5 : अभिजानन्तु : $(30) + (-23) + (-63) + (+55)$

समाधानम् : $(30) + (+55) + (-23) + (-63)$

$= 85 + (-86) = -1$

उदाहरणम् 6 : योगम् अभिजानन्तु : $(-10), (92), (84), (-15)$

समाधानम् : $(-10) + (92) + (84) + (-15)$

$= (-10) + (-15) + 92 + 82$

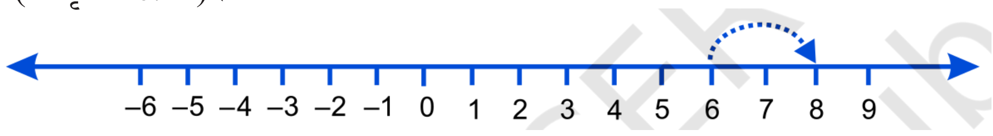
$= (-25) + 176 = 151$

अभ्यासः 6.2

1. सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं तं पूर्णाङ्कं जानन्तु यः
   (a) 5 तः 3 अधिकः अस्ति । (b) – 5 तः 5 अधिकः अस्ति ।
   (c) 2 तः 6 न्यूनः अस्ति । (d) – 2 तः 3 न्यूनः अस्ति ।
2. सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगपुरस्सरं अधोलिखितानां योगं कुर्वन्तु ।
   (a) $9 + (-6)$ (b) $5 + (-11)$
   (c) $(-1) + (-7)$ (d) $(-5) + 10$
   (e) $(-1) + (+2) + (-3)$ (f) $(-2) + 8 + (-4)$
3. सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगेण विना अधोलिखितानां योगं जानन्तु ।
   (a) $11 + (-7)$ (b) $(-13) + (+18)$
   (c) $(-10) + (+19)$ (d) $(-250) + (+150)$
   (e) $(-380) + (-270)$ (f) $(-217) + (-100)$
4. अधोलिखितानां योगं जानन्तु ।
   (a) 137 अपि च – 354 (b) – 52 अपि च 52
   (c) – 312, 39 अपि च 192 (d) – 50, – 200 अपि च 300
5. अधोलिखितानां मानं जानन्तु ।
   (a) $(-7) + (-9) + 4 + 16$
   (b) $(37) + (-2) + (-65) + (-8)$

6.4 सङ्ख्यारेखायाः साहाय्येन पूर्णाङ्कानां व्यवकलनम्

वयं सङ्ख्यारेखायाः उपरि द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं कृतवन्तः । उदाहरणार्थं $6 + 2$ अस्य विचारं कुर्वन्तु । वयं 6 तः प्रारम्भं कुर्मः अपि च दक्षिणभागे 2 पादान् चलामः । वयं 8 प्राप्नुमः । अतः $6 + 2 =$ 8 अस्ति (आकृतिः 6.11) ।



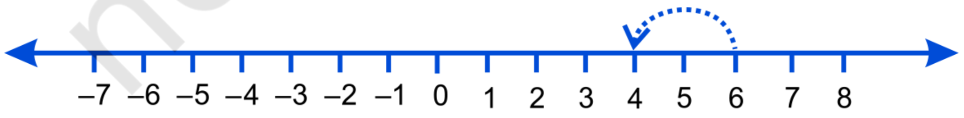
आकृतिः 6.11

वयं इदमपि दृष्टवन्तः आसन् यत् सङ्ख्यारेखायाः उपरि 6 अपि च (– 2) इत्येतयोः योजनं कर्तुं वयं 6 तः प्रारभ्य वामभागे 2 पादौ चलामः अपि च 4 प्राप्नुमः । अतः अस्माभिः 6 + (- 2) = 4 प्राप्तः भवति । (आकृतिः 6.12)

आकृतिः 6.12

इत्थं वयं प्राप्नुमः यत् एकस्य धनात्मकपूर्णाङ्कस्य योजनार्थं वयं सङ्ख्यारेखायाः उपरि दक्षिणभागे चलामः अपि च ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य योजनार्थं सङ्ख्यारेखायाः वामभागे चलामः ।

पूर्णसङ्ख्यानां कृते सङ्ख्यारेखायाः प्रयोगकरणसमये वयं दृष्टवन्तः आस्म यत् 6 इत्यस्मिन् 2 व्यवकलयितुं वयं 2 पादौ वामभागे चलितवन्तः आस्म (आकृतिः 6.13)।



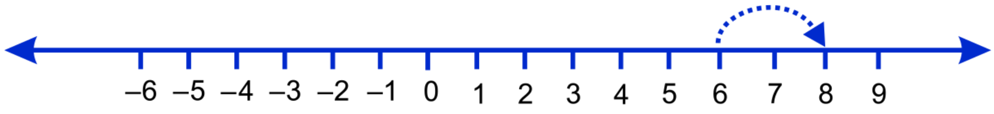
आकृतिः 6.13

अर्थात् 6 – 2 = 4 अस्ति ।

वयं 6 – (- 2) कर्तुं किं कुर्मः ? किं वयं सङ्ख्यारेखायाः वामभागे चलामः अथवा दक्षिणभागे चलामः ?

यदि वयं वामभागे चलामः तर्हि वयं 4 प्राप्नुमः । तदा अस्माभिः वक्तव्यं भवति यत् 6 – (– 2) = 4 अस्ति । एतत् सम्यक् नास्ति यतो हि 6 – 2 = 4 भवति तथा 6 – 2 ≠ 6 – (- 2) अस्ति ।

अतः अस्माभिः दक्षिणभागे गन्तव्यं भवति (आकृतिः 6.14) ।

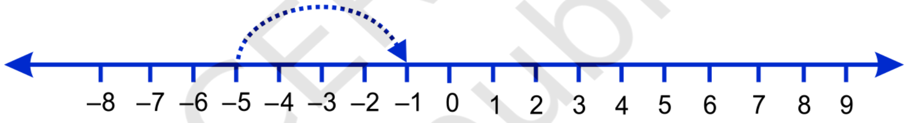


आकृतिः 6.14

अस्यार्थः एषः अपि अस्ति यत् यदा वयं एकस्य ऋणात्मकपूर्णाङ्कस्य व्यवकलनं कुर्मः तर्हि अस्माभिः एकः बृहत्पूर्णाङ्कः एव लभ्यते । अस्योपरि अन्यप्रकारेण अपि चिन्तयन्तु यत् – 2 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः 2 अस्ति । अतः अनेन एतत् तु प्रतीयते यत् 6 इत्यस्मिन् – 2 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमस्य योजनस्य अर्थः सः एव भवति यः 6 इत्यस्मिन् (– 2) इत्यस्य व्यवकलनस्य अस्ति ।

वयं लिखामः 6 – (– 2) = 6 + 2

आयान्तु अधुना – 5 – (– 4) इत्यस्य फलं सङ्ख्यारेखायाः साहाय्येन जानीमः । वयं वक्तुं शक्नुमः यत् एतत् – 5 + 4 इत्यस्य समानं अस्ति । अतः वयं सङ्ख्यारेखायाः उपरि – 5 तः प्रारभ्य 4 पादान् दक्षिणभागे चलामः (आकृतिः 6.15) । वयं – 1 प्राप्नुमः ।

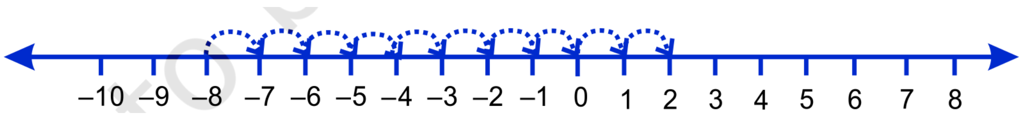


आकृतिः 6.15

अर्थात् – 5 + 4 = - 1 अस्ति। इत्थं – 5 – (– 4) = - 1 भवति।

उदाहरणम् 7 : सङ्ख्यारेखायाः साहाय्येन (- 8) – (- 10) इत्यस्य फलं जानन्तु।

समाधानम् : - 10 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः + 10 अस्ति, अतः (- 8) – (– 10) = - 8 + 10 अस्ति।



आकृतिः 6.16

सङ्ख्यारेखायाः उपरि वयं – 8 तः 10 पादान् दक्षिणभागे चलामः।
वयं 2 प्राप्नुमः (आकृतिः 6.16)।अतः – 8 – (–10) = 2 अस्ति।
इत्थम् एकेन पूर्णाङ्केन एकस्य अन्यपूर्णाङ्कस्य व्यवकलनार्थम् एतत् पर्याप्तम् अस्ति यत् व्यवकलनमानस्य पूर्णाङ्कस्य योज्यप्रतिलोमस्य अन्यपूर्णाङ्केन सह योजनम्।

उदाहरणम् 8 : (- 10) इत्यस्मिन् (– 4) व्यवकलनं कुर्वन्तु।

समाधानम् : (- 10) – (- 4) = (- 10) + (- 4 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः)
= - 10 + 4 = - 6

उदाहरणम् 9 : (- 3) इत्यस्मात् (+3) व्यवकलयन्तु।

समाधानम् : (- 3) – (+3) = (- 3) + (+ 3 इत्यस्य योज्यप्रतिलोमः)
= (-3) + (-3) = -6

अभ्यासः 6.3

1. व्यवकलनं कुर्वन्तु।
   (a) 35 – (20) (b) 72 – (90)
   (c) (– 15) – (– 18) (d) (– 20) – (– 13)
   (e) 23 – (– 12) (f) (– 32) – (– 40)

2. रिक्तस्थानं >, < अथवा = चिह्नेन पूरयन्तु।
   (a) (– 3) + (– 6) __________ (– 3) – (– 6)
   (b) (– 21) – (– 10) _________ (– 31)+ (– 11)
   (c) 45 – (– 11) _______ 57 + (– 4)
   (d) (– 25) – (– 42) ________ (– 42) – (– 25)

3. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।
   (a) (– 8) + ______ = 0 (b) 13 + _______ = 0
   (c) 12 + (– 12) ______ = (d) (– 4) + _______ = – 12
   (e) ________ – 15 = – 10

4. अधोलिखितानां फलं जानन्तु ।

(a) (– 7) – 8 - (– 25)　　(b) (– 13) + 32 – 8 – 1

(c) (– 7) + (– 8) + (– 90)　　(d) 50 – (– 40) – (– 2)

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. वयं दृष्टवन्तः यत् केषुचित् अवसरेषु वयं ऋणात्मकचिह्नयुक्तानां सङ्ख्यानाम् आवश्यकताम् अनुभवामः । सङ्ख्यारेखायां शून्यात् अधः यदि वयं चलामः तर्हि एतदनुभूयते । एताः ऋणात्मकसङ्ख्याः इत्युच्यन्ते । तापमानमापने, जलबन्धे अथवा नद्यां जलप्रमाणमापने, तैलसङ्ग्रहागारे तैलस्य मापने इत्यादिषु उदाहरणेषु ऋणात्मकचिह्नस्य उपयोगं कुर्मः । तथैव ऋणादान-प्रदाने अपि अस्य प्रयोगः भवति ।
2. ..., - 4, - 3, - 2, - 1, 0 , 1, 2, 3, 4, ... एतादृशसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः पूर्णाङ्कः इति कथ्यते । अतः – - 1, – 2, – 3, – 4,... ऋणात्मकसङ्ख्याः सन्ति ये च ऋणात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते । 1, 2, 3, 4, ... धनात्मकसङ्ख्याः सन्ति ये च धनात्मकपूर्णाङ्काः इत्युच्यन्ते ।
3. वयं एतदपि दृष्टवन्तः यत् कस्यापि दत्तसङ्ख्यायाः एका अधिकसङ्ख्या तस्याः परवर्तिसङ्ख्या भवति अपि च एका न्यून-सङ्ख्या पूर्ववर्तिसङ्ख्या भवति ।
4. वयं दृष्टवन्तः यत्
   (a) यदि समानचिह्नं भवति चेत् तर्हि योजयन्तु अपि च तदेव चिह्नं स्थापयन्तु ।
      (i) यदा यदा द्वयोः धनात्मकसंख्ययोः योजनं भवति तदा अस्माभिः एकः धनात्मकपूर्णाङ्कः एव प्राप्यते । [यथा, (+ 3) + (+ 2) = + 5]
      (ii) यदा यदा द्वयोः ऋणात्मकपूर्णाङ्कानां योजनं भवति तदा अस्माभिः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः एव प्राप्यते [यथा, (- 2) + (– 1) = – 3]
   (b) यदि पृथक् पृथक् चिह्नम् भवति तर्हि व्यवकलनं कृत्वा बृहत्सङ्ख्यायाः चिह्नं स्थापयेम ।
   (c) यदि द्वयोः धनात्मकपूर्णाङ्क-ऋणात्मकपूर्णाङ्कयोः योजनं कर्तव्यं तर्हि वयं तौ सम्पूर्णसंख्ययोःइवव्यवकलनंकुर्मःतथाचप्राप्तसङ्ख्यायांबृहत्सङ्ख्यायाःचिह्नंस्थापयेम [यथा (+ 4) + (- 3) = + 1 अपि च (- 4) + (+ 3) = - 1] ।
5. वयं दर्शितवन्तः यत् केन प्रकारेण पूर्णाङ्कानां योगम् अपि च व्यवकलनं सङ्ख्यारेखायाः उपरि दर्शयितुं शक्यते इति।